Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

Jueves 6 de mayo de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2221 – 7121

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

Considere dos números enteros positivos consecutivos, n y $n+1$.

Muestre que la diferencia de sus cuadrados es igual a la suma de esos dos enteros.

2. [Puntuación máxima: 7]

Resuelva la ecuación $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x = 4$, $0 \le x \le 2\pi$.

3. [Puntuación máxima: 5]

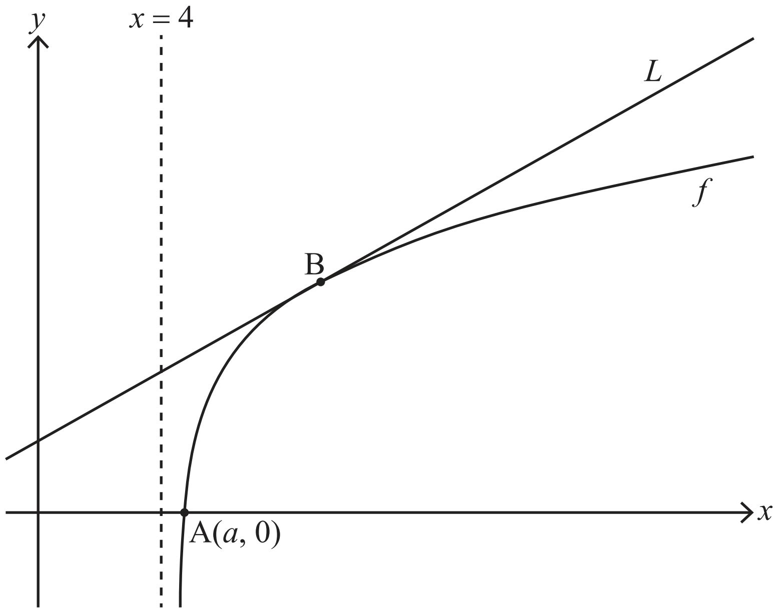
En el desarrollo de $(x+k)^7$, donde $k \in \mathbb{R}$, el coeficiente del término en x^5 es 63.

Halle los posibles valores de k.

4. [Puntuación máxima: 9]

Considere la función f que viene dada por $f(x) = \ln(x^2 - 16)$ para $x > 4$.

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f, que corta al eje x en el punto A de coordenadas $(a, 0)$. La recta L es la tangente al gráfico de f en el punto B.



(a) Halle el valor exacto de a. [3]

(b) Sabiendo que la pendiente de L es igual a $\frac{1}{3}$, halle la coordenada x de B. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

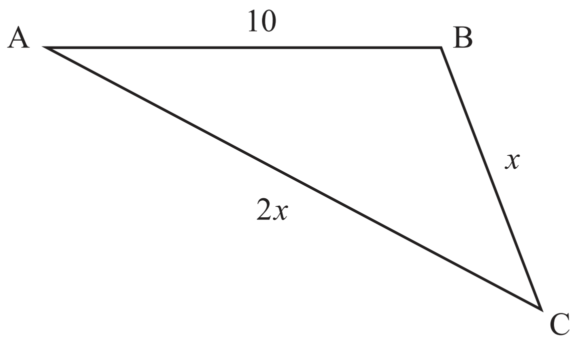
5. [Puntuación máxima: 4]

Dados dos vectores no nulos cualesquiera, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, muestre que $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

6. [Puntuación máxima: 7]

La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathrm{AB} = 10$, $\mathrm{BC} = x$ y $\mathrm{AC} = 2x$.

la figura no está dibujada a escala



Sabiendo que $\cos \hat{\mathrm{C}} = \frac{3}{4}$, halle el área del triángulo.

Dé la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{q}}{2}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^{+}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 5]

La ecuación cúbica $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, donde $k > 0$, tiene por raíces α, β y $\alpha + \beta$.

Sabiendo que $\alpha\beta = -\frac{k^2}{4}$, halle el valor de k.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Puntuación máxima: 8]

Las rectas l_1 y l_2 vienen dadas por las siguientes ecuaciones vectoriales, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$l_1 : \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l_2 : \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que l_1 y l_2 no se cortan. [3]

(b) Halle la distancia mínima entre l_1 y l_2. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 7]

Utilizando la sustitución $u = \operatorname{sen} x$, halle $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2} \mathrm{d}x$.

No escriba soluciones en esta página.

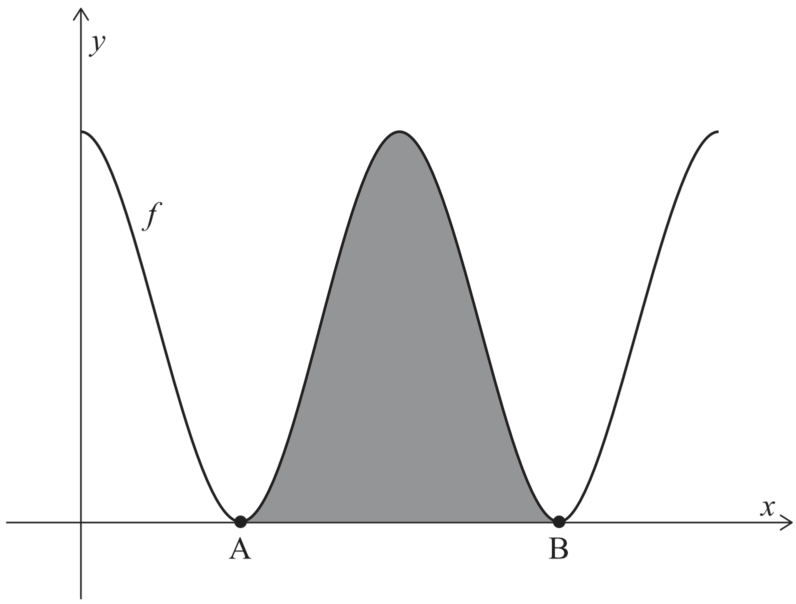
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

Considere la función f que viene dada por $f(x) = 6 + 6\cos x$, para $0 \le x \le 4\pi$.

La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$.



El gráfico de f toca el eje x en los puntos A y B, tal y como se muestra en la figura.
La región sombreada está delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y el eje x, entre los puntos A y B.

(a) Halle las coordenadas x de A y B. [3]

(b) Muestre que el área de la región sombreada es igual a 12π. [5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

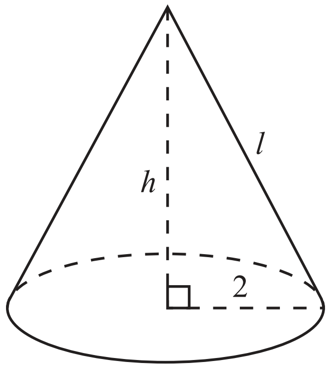
No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

En la siguiente figura se muestra un cono recto. El área total de su superficie es 12π, igual que el área sombreada de la figura anterior.

En dicho cono, el radio de la base mide 2, la altura h, y la generatriz l.

la figura no está dibujada a escala



(c) Halle el valor de l. [3]

(d) A partir de lo anterior, halle el volumen del cono. [4]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

La aceleración ($a\,\mathrm{ms}^{-2}$) de una partícula que se mueve a lo largo de una recta horizontal en el instante t segundos ($t \ge 0$) viene dada por $a = -(1+v)$, donde $v\,\mathrm{ms}^{-1}$ es la velocidad de la partícula, siendo $v > -1$.

En $t = 0$, la partícula se encuentra en un origen fijo O y tiene una velocidad inicial igual a $v_0\,\mathrm{ms}^{-1}$.

(a) Resolviendo una ecuación diferencial adecuada, muestre que la velocidad de la partícula en el instante t viene dada por $v(t) = (1 + v_0)\mathrm{e}^{-t} - 1$. [6]

(b) La partícula, que inicialmente se encuentra en O, se mueve en sentido positivo hasta que alcanza el máximo desplazamiento respecto a O. A continuación la partícula regresa a O.

Sea s (en metros) el desplazamiento de la partícula respecto a O y sea $s_{\text{máx}}$ su máximo desplazamiento respecto a O.

(i) Muestre que el tiempo T que tarda la partícula en alcanzar $s_{\text{máx}}$ satisface la ecuación $\mathrm{e}^{T} = 1 + v_0$.

(ii) Resolviendo una ecuación diferencial adecuada y utilizando el resultado obtenido en el subapartado (b) (i), halle una expresión para $s_{\text{máx}}$ en función de v_0. [7]

La expresión $v(T-k)$ representa la velocidad de la partícula k segundos antes de alcanzar $s_{\text{máx}}$, donde

$$v(T-k) = (1 + v_0)\mathrm{e}^{-(T-k)} - 1\,.$$

(c) Utilizando el resultado obtenido en el subapartado (b) (i), muestre que $v(T-k) = \mathrm{e}^{k} - 1$. [2]

De modo similar, la expresión $v(T+k)$ representa la velocidad de la partícula k segundos después de haber alcanzado $s_{\text{máx}}$.

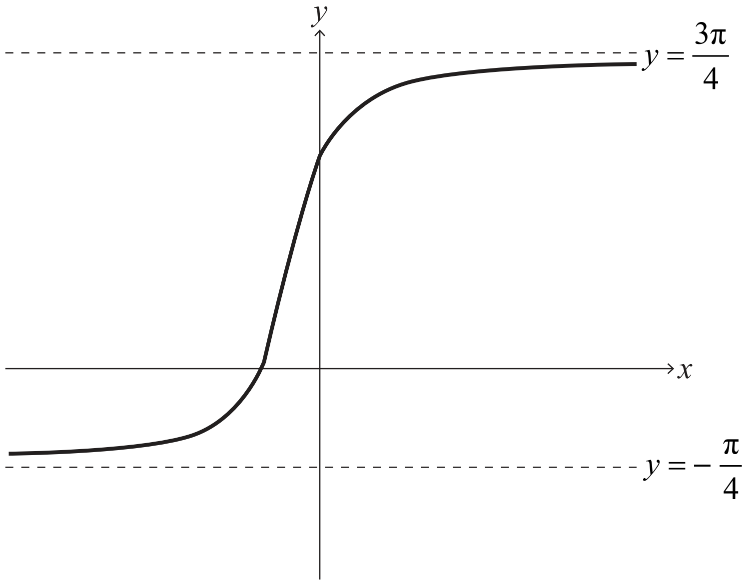
(d) Deduzca una expresión similar que dé $v(T+k)$ en función de k. [2]

(e) A partir de lo anterior, muestre que $v(T-k) + v(T+k) \ge 0$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 19]

La siguiente figura muestra el gráfico de $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ para $x \in \mathbb{R}$, cuyas asíntotas son $y = -\frac{\pi}{4}$ y $y = \frac{3\pi}{4}$.



(a) Describa una secuencia de transformaciones que transforme el gráfico de $y = \arctan x$ en el gráfico de $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ para $x \in \mathbb{R}$. [3]

(b) Muestre que $\arctan p + \arctan q \equiv \arctan\left(\frac{p+q}{1-pq}\right)$, donde p, $q > 0$ y $pq < 1$. [4]

(c) Verifique que $\arctan(2x+1) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{\pi}{4}$ para $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. [3]

(d) Utilizando la inducción matemática y el resultado obtenido en el apartado (b), demuestre que $\sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2r^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. [9]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.